www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

DURÉE : 4 heures

Dans tout le problème, on désigne par E un espace préhilbertien réel dont le produit scalaire est noté $< , >$. Si $u_1, \ldots, u_n$ sont n vecteurs de E, on note $U(u_1, \ldots, u_n)$ le sous-espace vectoriel qu'ils engendrent, $G(u_1, \ldots, u_n)$ la matrice (n, n) de terme général :

$$g_{i,j}(u_1, \ldots, u_n) = < u_i, u_j >$$

i (resp. j) étant l'indice de ligne (resp. colonne), et $g(u_1, \ldots, u_n)$ le déterminant de cette matrice.

Toutes les matrices considérées sont réelles.

Section I

Dans toute cette section, les n vecteurs $u_1, \ldots, u_n$ de E sont fixés, et on omettra de noter que U, $G = (g_{i,j})$ et g dépendent de $u_1, \ldots, u_n$.

La partie A est essentiellement consacrée à l'étude de la matrice G et la partie B à celle de son déterminant g.

PARTIE A

Dans cette partie, on désigne par F un sous-espace vectoriel de dimension finie m de E contenant U, par $\mathscr{B}$ une base orthonormée de F et par $A = (a_{i,j})$ la matrice (m, n) dont la j-ème colonne donne les composantes de u_j dans la base $\mathscr{B}$.

A.1. *(Deux résultats fondamentaux.)*

a. Montrer que l'on a $G = {}^tAA$, où ${}^tA$ désigne la matrice transposée de A.

b. Montrer que si m et n sont égaux, on a $g = (\det(A))^2$.

A.2. Soit Φ la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$\Phi(X) = {}^tXGX$$

pour tout vecteur colonne $X \in \mathbb{R}^n$.

a. Montrer que Φ est positive.

b. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) Φ est définie ;

(2) G est inversible ;

(3) U est de dimension n.

A.3. *(Étude du rang de G.)*

a. Montrer que pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$GX = 0 \Leftrightarrow AX = 0.$$

b. En déduire que le rang de G est égal à la dimension de U.

c. Montrer que le rang de G est le plus petit entier p tel qu'il existe une matrice B à p lignes et n colonnes vérifiant : $G = {}^tBB$.

A.4. *(Réciproque de l'étude précédente.)* Soit C une matrice symétrique (n, n), de rang p, telle que la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^n$ par $\Psi(X) = {}^tXCX$ soit positive. Montrer qu'il existe une matrice B à p lignes et n colonnes telle que $C = {}^tBB$ (on pourra traiter d'abord le cas où la matrice C est diagonale).

A.5. *(Cette question n'interviendra pas dans le reste du problème.)* On suppose que $\mathscr{U} = (u_1, \ldots, u_n)$ est une base de U.

a. F étant muni de la base $\mathscr{B}$ et U muni de la base $\mathscr{U}$, soit P la matrice de la projection orthogonale de F sur U considérée comme application linéaire de F vers U. Montrer que l'on a :

$$P = G^{-1}{}^tA.$$

b. F étant muni de la base $\mathscr{B}$, soit Q la matrice de la projection orthogonale de F sur U considérée comme application linéaire de F vers F. Montrer que l'on a :

$$Q = AG^{-1}{}^tA.$$

Tournez la page S.V.P.

PARTIE B

B.1. On note $\hat{u}_1 = 0$, et, pour $j = 2, \ldots, n$, $\hat{u}_j$ la projection orthogonale de u_j sur U_{j-1}, le sous-espace vectoriel engendré par $u_1, \ldots, u_{j-1}$. Montrer que l'on a :

$$g = \prod_{j=1}^{n} \| u_j - \hat{u}_j \|^2$$

où $\| \ \|$ désigne la norme associée au produit scalaire (on pourra utiliser la méthode d'orthogonalisation de Schmidt).

B.2. Donner une interprétation géométrique aux résultats des questions A.1.*b* et B.1. dans le cas $n = 2$ puis $n = 3$.

B.3. On suppose que $n = 3$ et que les vecteurs u_j sont unitaires. On désigne par α (resp. β, γ) l'angle compris entre 0 et π que font entre eux les vecteurs u_1 et u_2 (resp. u_2 et u_3, u_3 et u_1). Montrer que l'on a :

$$1 + 2\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma - (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) \geqslant 0.$$

B.4. Réciproquement, soient α, β, γ trois nombres entre 0 et π, posons :

$$\delta = 1 + 2\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma - (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)$$

et soit C la matrice symétrique :

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\gamma \\ \cos\alpha & 1 & \cos\beta \\ \cos\gamma & \cos\beta & 1 \end{bmatrix}$$

a. Soient $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3$ les trois valeurs propres de C rangées par ordre décroissant (et éventuellement non toutes distinctes). Montrer que λ_1 est > 0 et que λ_2 et λ_3 sont de même signe (resp. de signe contraire) si $\delta > 0$ (resp. si $\delta < 0$).

b. Soit Ψ la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ associée à C. Montrer que $\Psi(X)$ est $\geqslant 0$ pour tout vecteur colonne X de $\mathbb{R}^3$ ayant une composante nulle.

c. Montrer que, si δ est > 0, alors Ψ est définie positive.

d. Montrer que δ est > 0 si et seulement s'il existe trois vecteurs linéairement indépendants, v_1, v_2, v_3 de E tels que α (resp. β, γ) soit l'angle que font les vecteurs v_1 et v_2 (resp. v_2 et v_3, v_3 et v_1).

Section II

On suppose ici que l'espace préhilbertien réel E est de dimension infinie, et on désigne par $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de E formant une famille libre (c'est-à-dire que toute sous-famille finie est libre). Pour tout vecteur $v \in E$, on note v_n la projection orthogonale de v sur le sous-espace vectoriel $U(u_1, \ldots, u_n) = U_n$ engendré par $u_1, \ldots, u_n$.

1. Montrer que $v \in E$ est limite dans E de ses projections orthogonales v_n si et seulement si on a :

$$\lim_n \frac{g(u_1, \ldots, u_n, v)}{g(u_1, \ldots, u_n)} = 0.$$

On suppose désormais que E est l'espace vectoriel des fonctions continues définies sur [0, 1] et à valeurs réelles, muni du produit scalaire :

$$\langle u, v \rangle = \int_0^1 u(t)\, v(t)\, dt$$

et que $u_n(t) = t^{a_n}$ ($t \in [0, 1]$) où $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels strictement positifs tous distincts. On a alors évidemment :

$$g_{i,j}(u_1, \ldots, u_n) = \frac{1}{a_i + a_j + 1}.$$

Tournez la page S.V.P.

On admettra que l'on a (déterminant de Cauchy) :.

$$\det\left(\left[\left[\frac{1}{c_i + d_j}\right]\right]\right) = \frac{\prod_{i<j} (c_j - c_i)(d_j - d_i)}{\prod_{i,j} (c_i + d_j)}$$

où tous les nombres c_i et d_j sont > 0.

Enfin, on prend $v \in E$ de la forme $t \longmapsto t^a$ avec $a \geqslant 0$ distinct de tous les a_n.

2. *a.* Montrer que la famille des u_n est libre.

   b. Montrer que :

$$\frac{g(u_1, \ldots, u_n, v)}{g(u_1, \ldots, u_n)} = \frac{1}{2a+1} \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{2a+1}{a + a_i + 1}\right)^2.$$

3. On suppose la suite (a_n) bornée. Montrer que v est alors limite dans E de ses projections v_n.

4. On suppose dans cette question que la suite (a_n) tend vers $+\infty$

   a. Montrer que si (ε_n) est une suite de réels strictement compris entre 0 et 1, convergeant vers 0, alors la suite (p_n) définie par :

$$p_n = \prod_{i=1}^{n} (1 - \varepsilon_i)$$

   converge vers 0 si et seulement si la série de terme général ε_n est divergente.

   b. En déduire que v est limite dans E de ses projections v_n si et seulement si la série de terme général $\frac{1}{a_n}$ est divergente.

5. Montrer que v est limite dans E de ses projections v_n si et seulement si la série de terme général $\frac{1}{a_n}$ est divergente.

Désormais on suppose qu'on a $a \geqslant 1$ et $a_n > 1$ pour tout n.

6. On suppose que la série de terme général $\frac{1}{a_n}$ est divergente.

   a. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Montrer (à l'aide de l'inégalité de Schwarz) qu'il existe un entier n et des réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tels que l'on ait, pour tout $x \in [0, 1]$:

$$\int_0^x \left| t^{a-1} - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i t^{a_i - 1} \right| dt < \frac{\varepsilon}{a}. \qquad (*)$$

   b. Montrer que v est limite uniforme sur $[0, 1]$ d'une suite de combinaisons linéaires des u_n.

7. Montrer que v est limite uniforme d'une suite de combinaisons linéaires des u_n si et seulement si la série de terme général $\frac{1}{a_n}$ est divergente.

(*) $\displaystyle\int_0^1 \left| t^{a-1} - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i t^{a_i - 1} \right| dt < \frac{\varepsilon}{a}$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail